مواد إضافية - الفصل ٥

— مقدمة —

هل أنت من الأشخاص الذين يتمنون لو كانت هناك أمثلة أكثر، ومناقشات، وتعليقات في الوصف الموجز المتعمد للدروس؟ إذا كان الأمر كذلك، فقد وصلت إلى المكان الصحيح! يحتوي هذا الملف على مواد إضافية لبعض الأنشطة من الفصل ٥.

بالنسبة للألغاز، يتم تقديم العديد من الأمثلة للألغاز المحلولة، بالإضافة إلى تعليقات إضافية حول كيفية إنشائها. يعتمد برنامج الرياضيات العائلية المبكرة على فكرة أن الرياضيات المبكرة هي شيء يجب أن تقوم به العائلة معًا، وإنشاء الألغاز لطفلك للقيام بها معك هو جزء مهم من تلك العملية. بمجرد أن تتقن كل لغز، يجب أن تجد أن معظم الألغاز إن لم يكن جميعها سهلة الإنشاء بالنسبة لك.

تمتلك العديد من هذه الألغاز مستويات صعوبة مختلفة، وهناك العديد من الاقتراحات والأمثلة في الصفحات القادمة حول كيفية إنشاء تلك المستويات. ابدأ دائمًا بالألغاز الأسهل. من الأفضل بكثير أن يشعر طفلك بالنجاح والفهم والمتعة مع الألغاز التي تكون سهلة بعض الشيء، بدلاً من أن يشعر بالإحباط والتثبيط والتحدي الزائد بالألغاز الصعبة للغاية. بمجرد أن يبني طفلك الثقة والحماس لنشاط رياضيات، يكون ذلك هو الوقت لإدخال تحديات أكبر ببطء. أيضًا، ليس كل الألغاز ستكون ممتعة للجميع، لذا لا تركز على الألغاز والأنشطة التي لا تبدو متصلة.

هذا ما ستجده في الصفحات التالية:

- **الفصل ٥ – نيم مع العوامل**
- **الفصل ٥ – غربال إراتوستينس**
- **الفصل ٥ – الأوزان والموازين المتحركة**
- **الفصل ٥ – تقسيم الصندوق**
- **الفصل ٥ – ألغاز تبديل الأحرف**
- **الفصل ٥ – تحقيقات - اللعب بالأشكال**
- **الفصل ٥ – لعبة المنتج**
- **الفصل ٥ – الآلات الحاسبة المحدودة**
- **الفصل ٥ – المضاعفة أو لا شيء**

— المواد القانونية —

كل عائلة يجب أن تتاح لها الفرصة لتعلم الرياضيات والاستمتاع بها معاً. لهذا الغرض، تعتبر "Early Family Math" مجموعة من المواد التي يمكن للعائلات والمعلمين تحريرها، ترجمتها، نسخها، وتوزيعها بحرية، دون الحاجة إلى إذن، للاستخدامات غير التجارية فقط.

© حقوق الطبع والنشر Early Family Math - Chris Wright ٢٠٢٤ الإصدار ١.٠ رخصة المشاع الإبداعي: النسب-غير التجاري ٤.٠ الدولية.

الفصل ٥ – نيم مع العوامل

— مقدمة —

ابدأ بأي رقم، مثل ٢٠. دع الطفل يقرر ما إذا كان يريد البدء أولاً أو ثانيًا. خلال دورهم، يمكن للاعب أن يطرح أي قاسم للرقم الحالي من الرقم. اللاعب الذي يُجبر على الوصول إلى ٠ يخسر.

— التحليل —

كالعادة، استراتيجية جيدة لتعلم هذه اللعبة هي النظر إلى نسخة أبسط من اللعبة، وهذا يعني في هذه الحالة البدء بأرقام صغيرة جدًا. إذا كان دورك وواجهت كل من هذه الأرقام، فهذا ما سيحدث: ١ - تخسر، ٢ - تفوز، ٣ - تخسر، ٤ - تفوز، ٥ - تخسر، ٦ - تفوز، ٧ - تخسر، و ٨ - تفوز. الآن يصبح النمط واضحًا - إذا كان دورك ولديك رقم فردي، فسوف تخسر؛ إذا كان لديك رقم زوجي، فسوف تفوز.

إيجاد استراتيجية الفوز خطوة كبيرة، ولكن دعنا نذهب أعمق. لماذا يعمل هذا؟ ما هي خصائص الأرقام الفردية والزوجية التي تخلق هذا الوضع؟ اطرح هذا السؤال لطفلك ودعه يأخذ وقته في التفكير فيه والتجربة - لا داعي للاستعجال، وهذه العملية من المصارعة مع السؤال لا تقدر بثمن ويجب ألا تُختصر.

تجربة صغيرة مع الأرقام الصغيرة تكشف بسرعة ما يحدث. إذا كان لديك رقم فردي، فإن جميع القواسم فردية، لذا عندما تطرح أي قاسم، تكون النتيجة رقمًا زوجيًا. بالتالي، الأرقام الفردية في دور واحد تؤدي دائمًا إلى رقم زوجي في الدور التالي. الأرقام الزوجية دائمًا ما تكون لها قواسم زوجية وفردية. لذا، الوضع ليس هو نفسه تمامًا. ومع ذلك، إذا كان لديك رقم زوجي، هدفك هو إعطاء خصمك رقمًا فرديًا، وهناك طريقة سهلة للقيام بذلك - اختر القاسم ١ واطرحه!

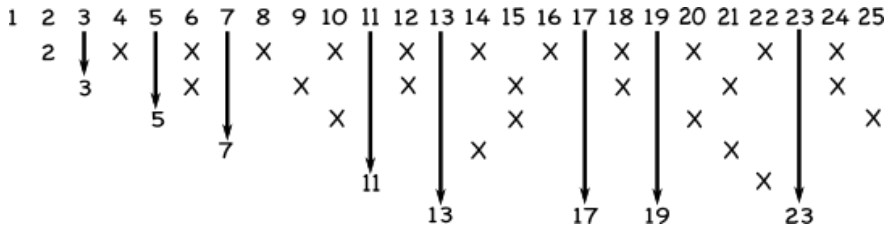
الفصل ٥ – غربال إراتوستينس

— المقدمة —

ابدأ بخط أعداد مرقم من ١ إلى ٢٥ - أو نطاق أكبر إذا سمح المكان وصبرك.

اكتب الرقم ٢ تحته مباشرة. في السطر الموازي لهذا الرقم ٢، ضع علامة X تحت كل مضاعف للرقم ٢.

الآن، انزل إلى أول رقم لا توجد تحته علامة X (وهو ٣ في هذه الحالة) وضعه في السطر التالي. اكتب الرقم ٣ وضع علامات X في هذا السطر لكل مضاعفاته. استمر بهذه الطريقة. في النهاية، ستكون قد سحبت جميع الأعداد الأولية. تذكر أن الرقم ١ هو وحدة وليس عددًا أوليًا!



— التحليل —

تكشف هذه العملية البسيطة بعض الحقائق المثيرة عن الأعداد الأولية. انظر ما إذا كان بإمكان طفلك التوصل إلى بعض هذه الأسئلة - ولكن إذا لم تظهر بشكل طبيعي، إليك بعض الأسئلة لتطرحها.

١) لماذا الأرقام التي تُسحب هي أعداد أولية؟

افترض أن لديك رقم مركب. نريد أن نوضح أن هذا الرقم سيكون له علامة X تحته. كونه مركبًا، فإنه يقسم على بعض الأعداد، n، بين ١ وذلك الرقم. إذا كان n عددًا أوليًا، فإن رقمنا المركب سيكون له علامة X تحته من n كونه عدد أولي سابق. إذا لم يكن n عددًا أوليًا، فسيكون له علامة X تحته من بعض الأعداد الأولية السابقة، دعنا نسميها p. الآن، p تقسم n بالتساوي و n تقسم رقمنا الجديد بالتساوي، لذا يجب على p أن تقسم رقمنا الجديد. نتيجة لذلك، عند تحديد مضاعفات p، ستكون علامة X قد وضعت تحت رقمنا الجديد.

٢) عندما تضع علامات X لمضاعفات عدد أولي، هناك بعض الأرقام التي لديها بالفعل علامة X من عدد أولي سابق. متى يحدث ذلك ومتى لا يحدث؟

دعونا ننظر إلى مضاعفات ٥ في الغربال أعلاه. مضاعفات ٥ × ٢، ٥ × ٣، و٥ × ٤ مُشطب عليها بالفعل. الجديد فقط هو ٥ × ٥. يحدث هذا لأن ٥ × ٢، ٥ × ٣، و٥ × ٤ هي جميعها مضاعفات للعددين الأوليين ٢ و٣. إذا أردنا وضع علامات X في أماكن جديدة، يجب أن نضرب ٥ في الأرقام التي تحتوي فقط على عوامل أولية أكبر من أو تساوي ٥. نظرًا لأن تتبع كل ذلك قد يكون مرهقًا، فإن ما يفعله بعض الأشخاص هو شطب المضاعفات الفردية فقط وتركها عند هذا الحد.

٣) بالنسبة لهذا الغربال، ما هو آخر عدد أولي كان له علامة X جديدة مفيدة في صفه؟

في هذا الغربال، الأعداد الأولية ذات علامات X المفيدة هي ٢، ٣، و٥. مضاعفات ٧ و ١١ كانت جميعها علامات X قديمة. إذا نظرت إلى إجابة السؤال الأخير، سترى الإجابة هنا. الطريقة الوحيدة للحصول على علامات X جديدة هي ضرب عدد أولي في أعداد أولية أكبر من أو تساوي نفسها. بمجرد أن نصل إلى عدد أولي مثل ٧ حيث ٧ × ٧ > ٢٥، لا نحتاج إلى التحقق منه. لذا، نحن فقط بحاجة إلى التحقق من الأعداد الأولية التي مربعها أصغر من أو يساوي الرقم الأخير.

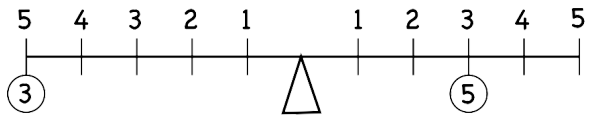
٤) إذا تم إعطاؤك رقمًا، لنقل ٥٣، أي الأعداد الأولية ستحتاج إلى تقسيمه بها لترى ما إذا كان أوليًا؟

من إجابة السؤال الأخير، نحتاج فقط إلى التحقق من الأعداد الأولية التي مربعها أقل من أو يساوي ٥٣. هذه الأعداد الأولية هي ٢، ٣، ٥، و٧ - لا يقسم أي منها ٥٣ بالتساوي، لذا يجب أن يكون ٥٣ أوليًا!

الفصل ٥ – الأوزان والموازين المتحركة

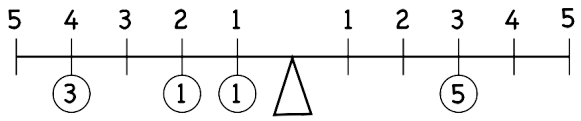
— الأوزان —

تنص مبدأ الأوزان أن القوة المؤثرة على جانب واحد من الرافعة بواسطة كتلة تساوي الكتلة مضروبة في المسافة من نقطة الارتكاز، الرافعة.



في الرافعة أعلاه، الرقم ٣ على الجانب الأيسر يبعد بمسافة ٥ من نقطة الارتكاز، لذا تكون قوته ٣ × ٥ = ١٥. الرقم ٥ على الجانب الأيمن يبعد بمسافة ٣ من نقطة الارتكاز، لذا تكون قوته ٥ × ٣ = ١٥. هذه الرافعة في حالة توازن.

إذا كان هناك أكثر من وزن على جانب واحد، فستجمع القوى معًا.



في هذه الرافعة، هناك ٣ × ٤ + ١ × ٢ + ١ × ١ = ١٥ على الجانب الأيسر، و٥ × ٣ = ١٥ على الجانب الأيمن. لذا فهي في حالة توازن.

سنقصر هذه المشكلات على استخدام الأعداد الصحيحة فقط. يمكنك أن تقرر ما إذا كنت ستسمح بتعليق أوزان متعددة على نفس النقطة – سنفترض أنه من الجيد تعليق أوزان متعددة في المناقشة التالية.

— ألغاز الرافعة —

لديك وزن بوحدة ٣ ووزن بوحدة ٥ لوضعهما على جانبي نقطة الارتكاز. أين يجب وضعهما لتحقيق التوازن؟ يمكن أن تكون الإجابة على هذا هي المسافات ٥ و٣، ولكن يمكن أيضًا أن تكون ١٠ و٦، أو حتى إجابات أكبر مثل ١٥ و٩. كن منفتحًا لمناقشة أي شيء يأتي به طفلك.

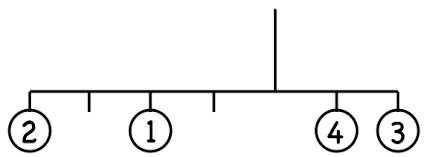
إذا كان لديك وزن بوحدة ٣ ووزن بوحدة ٥ لوضعهما على جانب واحد من الرافعة، ما هي الأوزان التي يمكنك وضعها في أي مسافات على الجانب الآخر؟ يستمر هذا السؤال الأسئلة في صفحة Make It Count في نهاية الفصل ٤. كما من قبل، استكشف تركيبات مختلفة من الأوزان. ماذا يحدث إذا تم استبدال ٣ و٥ بـ ٤ و٥، ٤ و٩، أو ٦ و٩؟

كيف تتغير هذه المشكلة الأخيرة إذا وضعنا الوزن بوحدة ٣ والوزن بوحدة ٥ على جانبي نقطة الارتكاز؟ الآن من السهل وزن وزن بوحدة ١ باستخدام ٣ × ٢ = ٥ × ١ + ١ × ١. ما الأوزان الأخرى التي يمكنك وزنها بهذه الطريقة؟

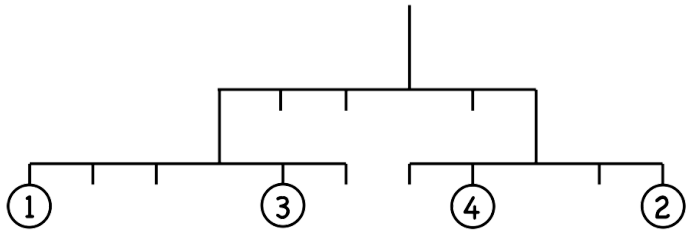
— الموبيلات —

يتم إعطاؤك بعض الأوزان وتصميم لموبيل يحتوي على بعض نقاط التعليق. التحدي هو وضع وزن واحد كحد أقصى لكل نقطة تعليق بحيث يتوازن الموبيل على طول كل ذراع. من أجل هذه المشكلات، سنفترض أن الأسلاك التي تخلق الموبيل عديمة الوزن. كل ذراع في الموبيل هو رافعة تحتاج إلى التوازن، لذا فإن هذه الألغاز هي امتداد لألغاز توازن الرافعة - قم بممارسة هذه الألغاز قبل البدء في هذه.

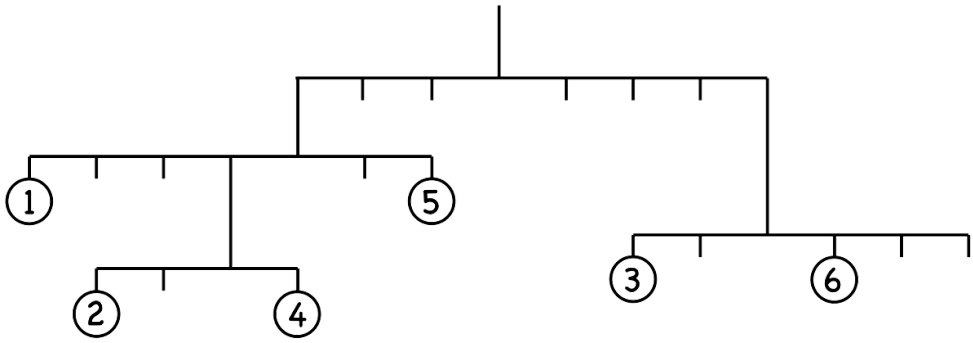
ابدأ بأبسط الموبيلات، وهي الرافعات في الهواء. هنا حل لوضع الأوزان من ١ إلى ٤ على هذا الموبيل لتحقيق التوازن. يعمل هذا كموبيل مع نقطة الارتكاز عند نقطة التعليق. بالنسبة لهذا الموبيل، لدينا ٢ × ٤ + ١ × ٢ = ٤ × ١ + ٣ × ٢.



إذا كان هناك أكثر من مستوى للموبيل، فيجب أن يتوازن كل ذراع فردي في كل مستوى كرافعة. بالنسبة للموبيل التالي، تتوازن الأذرع السفلية لأن ١ × ٣ = ٣ × ١ و٤ × ١ = ٢ × ٢. بالنسبة للمستوى التالي للأعلى، تضيف فقط الأوزان أدناه. على سبيل المثال، الوزن على الجانب الأيسر هو ١ + ٣ = ٤ - بالنسبة للمستوى التالي للأعلى، لا يهم أين توضع الأوزان على الذراع السفلي. لذا، بالنسبة للمستوى التالي للأعلى، (١ + ٣) × ٣ = (٤ + ٢) × ٢ = ١٢، لذا فإن المستوى العلوي يتوازن أيضًا.



استمتع بإنشاء ألغاز الموبيل لبعضكم البعض. إليك آخر للعب به باستخدام كل الأرقام من ١ إلى ٦. لا تقلق بشأن أن تكون مزخرفًا واستخدام كل رقم مرة واحدة. أي لغز مكتمل سيكون ممتعًا. عند التحقق من المستويات لدينا: ٢ × ٢ = ٤ × ١؛ ١ × ٤ + (٢ + ٤) × ١ = ٥ × ٢؛ ٣ × ٢ = ٦ × ١؛ و(١ + ٢ + ٤ + ٥) × ٣ = (٣ + ٦) × ٤.



الفصل ٥ – تقسيم الصندوق

— المقدمة —

ابدأ بمستطيل بحجم ٤ × ٤ أو أكبر، حيث توجد بعض الأرقام في مربعاته، ليتم تقسيمه إلى مستطيلات أصغر. يجب أن ينتهي كل رقم في مستطيل منفصل تكون مساحته مساوية لذلك الرقم.

بالنسبة للبالغين، يعتبر إنشاء هذه الألغاز سهلًا بما فيه الكفاية. خذ مستطيلًا، وقسم داخله إلى مستطيلات، وضع الأرقام داخل كل مستطيل للتمثل المساحة، ثم قم بإزالة أي علامة تدل على المستطيلات الداخلية. الجزء الوحيد الذي قد يكون صعبًا هو وضع الأرقام في أماكن تجعل اللغز سهل الحل - يمكنك دائمًا تقديم تلميحات إذا كان اللغز صعبًا جدًا.

— استراتيجيات الحل —

إليك بعض الاستراتيجيات العامة التي يمكن أن تبسط حل هذه الألغاز. ابذل جهدك لتدع طفلك يكتشف هذه القواعد أثناء اللعب بالألغاز. قم بعمل قائمة معًا بالقواعد التي يكتشفونها.

			3
	4	3	
	2		
4			

			3
	4	3	
	2		
4			

			3
	4	3	
	2		
4			

١) النظر إلى الأرقام التي لها خيار واحد أو خيارين فقط لمستطيلاتها.

كل من الرقمين ٤ محدودين جدًا. يمكن أن يكون كل ٤ داخل مستطيل ١ × ٤ أو مستطيل ٢ × ٢ فقط. الرقم ٤ العلوي محاصر، لذا لا يمكن أن يكون داخل مستطيل ١ × ٤. لذلك، يجب أن يكون هناك مستطيل ٢ × ٢ في الزاوية العلوية اليسرى. هذا يترك الرقم ٤ السفلي مع إمكانية أن يكون مستطيله ١ × ٤ ويذهب على طول الجانب السفلي.

٢) النظر إلى الأرقام الأولية -

يجب أن تكون داخل مستطيل ١ × n. الرقمين ٣ في اللغز أعلاه يجب أن يكونا داخل مستطيل ١ × ٣. الرقم ٣ في الزاوية العلوية اليمنى يمكن أن يكون جزءًا من مستطيل ١ × ٣ يمتد على طول الحافة العلوية أو على طول الجانب الأيمن. المربع ٢ × ٢ العلوي الأيسر المحجوز للرقم ٤ يجعل من المستحيل وجود مستطيل ١ × ٣ على طول الحافة العلوية.

مستطيل ١ × ٤ على طول القاع يجبر الرقم ٣ على أن يكون في المستطيل العمودي العلوي من بين الخيارين الرأسيين.

		3	6		2
				3	5
	6				
		5			
	4			2	

		3	6		2
				3	5
	6				
		5			
	4			2	

		3	6		2
				3	5
	6				
		5			
	4			2	

٣) الأرقام القريبة من الحد الأقصى للأبعاد غالبًا ما تكون لديها خيارات قليلة.

انظر إلى الأرقام ٦ و٥ في هذا اللغز التالي. الرقم ٦ العلوي يحتاج إلى الكثير من المساحة، والطريقة الوحيدة الكافية هي أن يكون عموديًا مباشرة للأسفل، مستخدمًا العمود بأكمله. الرقم ٦ الآخر لا يمكن أن يكون ١ × ٦ لأن الصف قُطع بواسطة عمود الرقم ٦ الآخر. لذا، يجب أن يكون الرقم ٦ السفلي ٢ × ٣، الذي لم يتم تحديده بعد بالكامل.

كمثال آخر، إذا كان هناك رقم ٨ في هذا اللغز، ١ × ٨ لن يتناسب، لذا يجب أن يكون جزءًا من مستطيل ٢ × ٤.

٤) المربعات المحصورة لديها خيارات قليلة.

الرقم ٥ العلوي محصور، لذا خياره الوحيد هو أن يكون في عمود من ٥ مربعات. الرقم ٥ الآخر، لأنه أيضًا عدد أولي، يجب أن يكون عموديًا أو أفقيًا. يتم قطعه أفقيًا بواسطة عمود الرقم ٦، لذا يجب أن يكون عموديًا صاعدًا إلى أسفل الرقم ٣ مباشرة.

٥) الزوايا غالبًا ما تكون محدودة للغاية.

الرقم ٢ في الزاوية العلوية اليمنى يجب أن يكون أفقيًا، لذا من السهل ملؤه.

الفصل ٥ – ألغاز تبديل الأحرف

— المقدمة —

بمجرد أن يصبح طفلك متمكنًا من ألغاز العدد المفقود من الصفحات السابقة في هذا الفصل، يمكنهم البدء باللعب بهذه الألغاز. في هذه الألغاز، يتم استبدال رقم أو أكثر بحروف. القواعد الثلاثة للحروف هي:

- الحرف المعطى دائمًا يمثل نفس الرقم
- الرقم الأول من اليسار في العدد لا يكون ٠ أبدًا
- الحروف المختلفة يجب أن تمثل أرقامًا مختلفة

أنشئ هذه الألغاز بأخذ مسألة جمع أو طرح واستبدال رقم أو أكثر بالحروف. يمكن أيضًا إنشاء الألغاز لجعلها تحديات مثيرة لحل المشكلات لطفلك. لاحظ أن قيم الحروف لا تنتقل من لغز إلى آخر.

— أمثلة —

يوضح المثال الأول كيفية أخذ مسألة جمع أو طرح قياسية وجعلها لغز تبديل الحروف. النسخة الأولى استبدلت جميع الأرقام ٦ بحرف A، والنسخة الثانية استبدلت الأرقام ٢ بحرف B.

$$\begin{array}{r} 23 \\ +46 \\ \hline 69 \end{array} \dashrightarrow \begin{array}{r} 23 \\ +4A \\ \hline A9 \end{array} \quad \begin{array}{r} B3 \\ +4A \\ \hline A9 \end{array}$$

بقية هذه الأمثلة مصممة بعناية للسماح بالحل باستخدام خصائص الحالة الخاصة. يجب ملاحظة خاصية واحدة وهي أنه عند جمع رقمين، فإن الحمل إلى العمود التالي يكون دائمًا إما ٠ أو ١. على سبيل المثال، في المسألة A + A = C٤، يجب أن يكون C هو ١ لأنه لا يُسمح له أن يكون ٠.

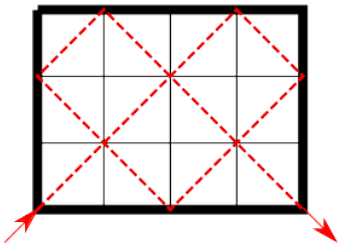
$$\begin{array}{r} B \\ +8 \\ \hline C \end{array} \quad \begin{array}{r} B \\ +B \\ \hline 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} A \\ +A \\ \hline C4 \end{array} \quad \begin{array}{r} A \\ +2 \\ \hline BC \end{array} \quad \begin{array}{r} D \\ +2 \\ \hline EE \end{array} \quad \begin{array}{r} A \\ +B \\ \hline AC \end{array}$$

$$\begin{array}{r} A \\ A \\ +A \\ \hline B2 \end{array} \quad \begin{array}{r} C \\ C \\ +C \\ \hline D4 \end{array} \quad \begin{array}{r} A \\ A \\ +7 \\ \hline B \end{array} \quad \begin{array}{r} A \\ A \\ +B \\ \hline B0 \end{array} \quad \begin{array}{r} A \\ +BB \\ \hline A7 \end{array} \quad \begin{array}{r} B \\ +AB \\ \hline BA \end{array}$$

$$\begin{array}{r} BA \\ +BB \\ \hline CAB \end{array} \quad \begin{array}{r} AD \\ +BD \\ \hline BCC \end{array} \quad \begin{array}{r} AA \\ +BA \\ \hline BBC \end{array} \quad \begin{array}{r} AA \\ +CB \\ \hline BBC \end{array} \quad \begin{array}{r} AA \\ +AB \\ \hline CAC \end{array} \quad \begin{array}{r} AA \\ +AA \\ \hline BBC \end{array}$$

الفصل ٥ – تحقيقات - اللعب بالأشكال

— كرة البلياردو المرتدة – المقدمة —



تخيل طاولة بلياردو تحتوي على جيب في كل زاوية. عندما ترتد الكرة من جانب الطاولة، ترتد بنفس الزاوية التي أتت بها. إذا أطلقنا كرة بزاوية ٤٥ درجة من الزاوية السفلية اليسرى، أين ستنتهي؟ تعتمد الإجابة على حجم الطاولة. في الصورة على اليمين يمكنك رؤية ما يحدث على طاولة بحجم ٣ × ٤.

أعطِ طفلك رسمًا لطاولة وتحداه للتنبؤ بأي زاوية ستُصدم أولاً وكم عدد الارتدادات اللازمة للوصول إلى تلك الزاوية.

— كرة البلياردو المرتدة – التحليل —

ابدأ بالسماح لطفلك باللعب بهذه الفكرة دون التسرع في اكتشاف النتائج. كما سترى، هذه المسألة تتضمن بعض الأفكار المعقدة للشباب. عند الحاجة، اطرح سؤالًا أو اثنين لإعطاء تفكيرهم بعض الهيكلية. تعرف ما الذي سيأتي – ابدأ بالنظر إلى الطاولات الأبسط أولاً للبحث عن الأنماط - عندما تصبح هذه الفكرة تلقائية لطفلك، فإن ذلك سيخدمهم جيدًا لبقية حياتهم!

أبسط الطاولات هي ١ × n، وهي سهلة الفهم. اللعب ببعض قيم n، يظهر النمط بسرعة. من السهل التقليل من قيمة نتيجة بسيطة كهذه؛ ومع ذلك، يجب الاحتفال بأي نتيجة مفهومة تمامًا، وهذه النتيجة ستؤدي إلى نتائج أخرى.

<u>نتيجة</u>: الطاولة ١ × n: ستأخذ الكرة n-١ ارتدادات. ستنتهي الكرة في الزاوية اليمنى السفلية إذا كان n زوجيًا وفي الزاوية اليمنى العليا إذا كان n فرديًا.

الطاولات الأبسط التالية هي ٢ × n. الأنماط هنا أكثر تعقيدًا قليلاً. يمكن أن يحدث حفظ السجلات الجيدة فرقًا كبيرًا في شيء مثل هذا. سيلاحظ المجرب الملاحظ أن الطاولة ٢ × ٤ تتصرف تمامًا مثل الطاولة ١ × ٢، والطاولة ٢ × ٦ مثل الطاولة ١ × ٣. يتعمم هذا بسرعة إلى النتيجة التالية.

<u>نتيجة</u>: الطاولة ٢ × ٢xn تتصرف تمامًا مثل الطاولة ١ × n.

لماذا هذا؟ ماذا يجري هنا؟ هذا هو عملية رياضية لترسيخها في طفلك – ابحث عن الأنماط ثم اسعى لفهمها، ومع هذا الفهم الجديد، مد نتائجك السابقة.

ما يحدث هو أن الارتدادات على الطاولة لا تتغير إذا قمت بتكبير كلا الأبعاد بنفس العامل. عندما يتم ذلك، تصبح الطاولة أكبر ولكن الجيوميتريا تبقى نفسها. بعبارات هندسية، يُقال أن الطاولتين "متشابهتين".

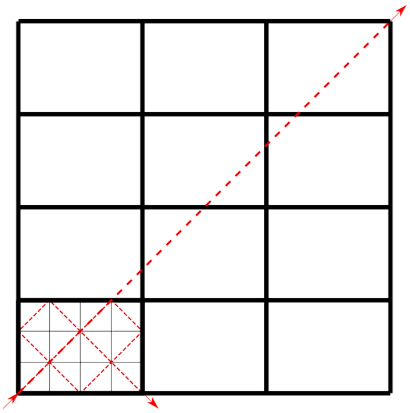
نتيجة: الطاولة kxm بواسطة kxn تتصرف تمامًا مثل الطاولة mxn.

لقد وصلنا هنا بخطوات صغيرة، لكن هذه نتيجة كبيرة. هذا يعني أنه يمكننا بدء تحليلنا على أي طاولة عن طريق إزالة أي عامل مشترك أولاً.

العودة إلى حيث تركنا بالنسبة للطاولات ٢ × n. نحن نفهم ما يحدث عندما يكون n زوجيًا، ولكن ماذا يحدث عندما يكون n فرديًا؟ ماذا يحدث لطاولات ٢ × n لـ n = ١، ٣، ٥، ٧، وهكذا؟ يصبح النمط واضحًا بسرعة.

نتيجة: عندما يكون n فرديًا، الطاولة ٢ × n تحتوي على n ارتدادات وتنتهي في الزاوية اليسرى العليا.

يتم إحراز الكثير من التقدم. اللعب بالمزيد من الأمثلة يؤدي إلى بعض الأنماط الإضافية.



نتيجة: إذا لم يكن n مضاعفًا لـ ٣، فإن الطاولة ٣ × n تحتوي على n+١ ارتدادات وتنتهي في الزاوية اليمنى العليا إذا كان n به باقي ١ عند قسمته على ٣، وفي الزاوية اليمنى السفلية إذا كان n به باقي ٢ عند قسمته على ٣. إذا كان n فرديًا، فإن الطاولة ٤ × n تحتوي على n + ٢ ارتدادات وتنتهي في الزاوية اليسرى العليا. إذا لم يكن n مضاعفًا لـ ٥، فإن الطاولة ٥ × n تحتوي على n+٣ ارتدادات وتنتهي في الزاوية اليمنى العليا عندما يكون n فرديًا وفي الزاوية اليمنى السفلية عندما يكون n زوجيًا.

في هذه المرحلة، نحن مغريون بالنظر إلى البيانات، ورؤية بعض الأنماط، ووضع بعض الفرضيات.

الفرضية: افترض أن k و n ليس لديهما عوامل مشتركة. ثم ستحتوي الطاولة k × n على n + k - ٢ ارتدادات. ستنتهي في الزاوية اليسرى العليا إذا كان k زوجيًا. ستنتهي في الزاوية اليمنى العليا إذا كان k فرديًا و n فرديًا، وفي الزاوية اليمنى السفلية إذا كان k فرديًا و n زوجيًا.

رائع- إذا كانت هذه الفرضية صحيحة، فقد حللنا هذه المشكلة تمامًا! تعرف ما الذي سيأتي... دعنا نرى ما إذا كان بإمكاننا تفسير لماذا يجب أن تكون هذه الفرضية صحيحة (أو اكتشاف أنها خاطئة).

على الرغم من أن هناك طرقًا أخرى لفهم هذا الوضع، كما يحدث أحيانًا، فإن ما يجعل هذه المشكلة أسهل للفهم هو فكرة جديدة. قد لا تخطر على بالك، ولكن بمجرد أن تراها، ربما ستندهش. الفكرة هي فك الطاولة بحيث يمكن للكرة أن تسير في خط مستقيم! هنا ما يحدث إذا فككنا الطاولة ٣ × ٤ الأصلية وجعلنا مسار الكرة خطًا مستقيمًا.

رؤية أن الفرضية صحيحة أصبح أسهل الآن. الارتدادات تتوافق مع عبور الخطوط - هناك (k - ١) للعبور في اتجاه واحد و(n - ١) للعبور في الاتجاه الآخر، لذا معًا هذا يجعل مجموع (k - ١) + (n - ١) = k + n - ٢ خطوط للعبور. رؤية أي زاوية تنتهي فيها هي مسألة تتبع كيف تتكشف الأشياء. لقد انتهينا الآن من رحلة مثيرة للغاية.

— ملء المناطق بالأشكال – مقدمة —

افترض أن لديك لوحة شطرنج ٨ × ٨ ولديك مجموعة من البلاطات ١ × ٢. العثور على طريقة لتغطية لوحة الشطرنج تمامًا باستخدام ٣٢ من هذه البلاطات ١ × ٢ هو أمر بسيط.

لنبدأ بإزالة بعض المربعات من لوحة الشطرنج ونرى ما يحدث. إذا أزلت إحدى الزوايا من لوحة الشطرنج، ستدرك فورًا أنك لم تعد تستطيع تغطية لوحة الشطرنج بالبلاطات لأن البلاطات ستغطي دائمًا عددًا زوجيًا من المربعات، والآن هناك ٦٣ مربعًا لتغطيتها. حسنًا، قم بإزالة زاويتين لجعل العدد المتبقي من المربعات زوجيًا - هل يمكنك تغطيتها الآن؟ الإجابة تعتمد على أي زاويتين قمت بإزالتهما. لماذا؟ ماذا لو لم تقصر نفسك على إزالة الزوايا فقط، ما الذي سيحدث حينها؟

— ملء المناطق بالأشكال – التحليل —

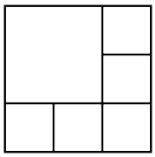
دع طفلك يلعب بهذه الفكرة قبل كشف فكرة التلوين. إذا لعبوا باللوحات الصغيرة، قد يكتشفون القاعدة بأنفسهم، وهذا دائمًا أفضل.

ملاحظة تساعد كثيرًا في هذه المسألة هي استخدام تلوين مربعات لوحة الشطرنج. إذا أخذت البلاطات ١ × ٢ ولونت مربعًا واحدًا بالأبيض والآخر بالأسود، سترى شيئًا مثيرًا يحدث. كل بلاطة يجب أن تغطي مربعًا من كل لون. ليس فقط ستغطي k بلاطات ٢xk مربعات، ولكنها ستغطي k مربعات بيضاء وk مربعات سوداء - نفس عدد المربعات من كل لون. باستخدام هذه الفكرة، يصبح من الواضح أنه إذا أزلت المزيد من المربعات من لون واحد أكثر من الآخر، فسيكون من المستحيل تغطية اللوحة.

إذا كان طفلك يستمتع بهذه الأسئلة، ابدأ بالتفرع لاستخدام أشكال أخرى لملء اللوحة. العب بملئها ببلاطات ١ × ٣ أو بثلاث مربعات على شكل حرف L. ما الأنماط والقواعد التي تكتشفها مع هذه الأشكال؟ ما الأشكال الأخرى التي قد تكون مثيرة للاهتمام للعب بها؟

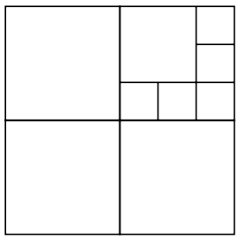
— ملء المربعات بالمربعات – مقدمة —

بأي طرق يمكنك ملء مربع بمربعات أخرى، حيث لا تحتاج كل المربعات الأخرى أن تكون بنفس الحجم؟ ومع ذلك، لا يمكن أن تكون الأطوال أرقامًا عشوائية تمامًا - يجب أن يكون طول الجانب لكل مربع مضاعفًا كاملاً لطول ثابت. السؤال للتحقيق هو: ما هي جميع أعداد المربعات الممكنة؟ أيضًا، إذا كنت تعرف أن عددًا ما ممكن، هل هناك طريقة سهلة لوصف كيفية القيام بذلك؟



دع طفلك يلعب بهذه الفكرة على مدى أيام عديدة ولا تتعجل في الوصول إلى الإجابة. هناك العديد من الطرق المختلفة للتوصل إلى أفكار للتحقيق في هذا السؤال، لذا كن مرنًا واعمل مع أفكار طفلك. هنا رسم بياني يوضح كيفية تحقيق ٦.

القدوم ببعض الأمثلة السريعة هو دائمًا فكرة جيدة. تقسيم المربع الكبير إلى مربعات متساوية الحجم كنقطة بداية سهلة. من ذلك تعرف أن الأعداد المربعة (١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥، ...) كلها تعمل.



بالبناء على مثال المربع ٦، يمكننا استخدام مربع كبير بأي حجم ووضع مربعات ١ × ١ على جانبين منه. القيام بذلك لمربعات أكبر وأكبر (١ × ١، ٢ × ٢، ٣ × ٣، ...) نحصل على ١ + ٣ = ٤، ١ + ٥ = ٦ (كما هو موضح)، ١ + ٧ = ٨، ١ + ٩ = ١٠، وهكذا. لذا، يمكن تحقيق جميع الأعداد الزوجية بدءًا من ٤ بهذه الطريقة.

فكرة قوية تنهي هذا بسرعة هي رؤية أنه يمكننا أخذ رسم بياني يعمل، واستبدال أحد مربعاته برسم بياني آخر يعمل. على سبيل المثال، إذا أخذت مربعًا بسيطًا ٢ × ٢ مليء بـ ٤ مربعات ١ × ١، واستبدلت أحد تلك المربعات ١ × ١ بمثال المربع ٦، ستحصل على الرسم البياني الموضح على اليمين بـ ٩ مربعات.

لأن أحد المربعات يتم استبداله برسم بياني n-مربع، فإن التغيير الصافي في عدد المربعات هو إضافة n-١ منها. هذا يعني أنه يمكننا أخذ رقم واحد يعمل، وإضافة مضاعفات أقل منه بواحد إلى أي رقم آخر يعمل. على وجه الخصوص، يمكننا إضافة مضاعفات ٤ -١ = ٣ إلى أي رقم آخر يعمل - الأرقام الزوجية السهلة لإضافة ٣ إليها هي جميع الأعداد الزوجية بدءًا من ٤.

جمع كل ذلك معًا يقول إن الأعداد ١، ٤، ٦، ٧، ٨، ٩، ... كلها تعمل، ومن السهل رؤية طريقة بسيطة واحدة على الأقل لبنائها. من السهل أيضًا إقناع نفسك بأن ٢، ٣، و٥ مستحيلة.

إذا كان طفلك يستمتع باستكشاف هذا السؤال، استكشف تنوعات على هذا الموضوع. افترض أنك تسمح فقط بمربعات بأحجام معينة - مثل ١ × ١، ٢ × ٢، و٣ × ٣. أو ربما تسمح فقط بـ ٢ × ٢ و٣ × ٣. انظر إلى أي الأسئلة تؤدي إلى نتائج مثيرة للاهتمام وأيها ليست كذلك.

اتجاه آخر للنظر فيه هو ملء أشكال أخرى بأشكال لها نفس الشكل. على سبيل المثال، اسأل نفس السؤال عن المثلثات المنتظمة (مثلثات جميع جوانبها بنفس الطول). بعض الأشكال تكون مثيرة للتحقيق بهذه الطريقة، وبعضها الآخر ليس كذلك - أيها مثيرة للاهتمام؟

الفصل ٥ – لعبة المنتج

– مقدمة –

استخدم ورقة لعب مشتركة يتم ملؤها على النحو التالي:

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
54	56	63	64	72	81

يقوم اللاعب الأول بتحريك رمز إلى أي رقم من ١ إلى ٩ في مربعات الصف السفلي. اللاعب الثاني يضع رمزًا آخر على أحد مربعات الصف السفلي ويدعي الناتج في شبكة ٦ × ٦. من ذلك الحين فصاعدًا، يختار كل لاعب تحريك أحد الرمزين ويدعي الناتج (إذا استطاع). اللاعب الأول الذي يدعي ٣ مربعات على التوالي يفوز. يمكنك خلط أرقام المنتجات في شبكة ٦ × ٦ لإعطاء طفلك ممارسة أفضل في تحديد المنتجات.

1	2	3	4	5	6	7	8	9

يمكن أن تكون هذه ألواح اللعب كبيرة بقدر ما تريد، على الرغم من أنها تصبح كبيرة جدًا بسرعة. إليك بعض الألواح الأكبر مع نطاقات الأرقام الأكبر المطابقة لها أسفلها.

★	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	14
15	16	18	20	★	21	22
24	25	27	28	30	32	33
35	36	40	42	44	45	48
49	★	50	54	55	56	60
63	64	66	70	72	77	80
81	88	90	99	100	110	121

★	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	★	12	14	15
16	18	20	21	22	24	25	27
★	28	30	32	33	35	36	40
42	44	45	48	★	49	50	54
55	56	60	63	64	66	70	72
★	77	80	81	84	88	90	96
99	100	108	110	120	121	132	144

1	2	3	4	5	6	7
7	8	9	10	12	14	
15	16	18	20	21	24	
25	27	28	30	32	35	
36	40	42	45	48	49	
50	54	56	60	63	64	
70	72	80	81	90	100	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

المربعات ذات النجوم الحمراء هي "مربعات حرة" ويمكن استخدامها من قبل أي جانب حسب الحاجة.

الفصل ٥ – الآلات الحاسبة المحدودة

— المقدمة —

افترض أن لديك آلة حاسبة معطلة بشكل سيء وتم تحديك لتحقيق نتيجة معينة باستخدامها. يمكنك ابتكار مجموعة متنوعة من السيناريوهات التي تقدم تحديات ممتعة بوصف لغز سريع. هذا النشاط سهل اللعب شفهيًا كلما كان لديك لحظة فراغ. إليك بعض الأمثلة لتبدأ بها.

على الرغم من أن هناك لحظات تتضمن رياضيات أعمق في هذه الأسئلة، إلا أن معظمها مشكلات للمتعة واللعب بها.

١) افترض أن لديك آلة حاسبة بها مفاتيح +، -، ×، و /، ولكن لديها مفتاح رقم واحد يعمل فقط، وهو ٤. هل يمكنك الحصول على النتيجة ٢١؟ إذا كان الأمر كذلك، ما هو أقل عدد من الخطوات التي ستحتاج إليها؟

٤ + ٤ + ٤ + ٤ + ٤ + ٤/٤ = ٢١ هي إحدى الطرق، ولكن هناك العديد من الطرق الأخرى لتحقيق ذلك. طريقة أخرى هي ٤ × (٤ + ٤/٤) + ٤/٤. الهدف هو اللعب والاستمتاع بالاستكشاف.

١) افترض أنك تستطيع استخدام الرقم ٤ بحد أقصى أربع مرات - ما الأرقام التي يمكنك إنتاجها؟ افترض أنه يجب عليك استخدام الرقم ٤ بالضبط أربع مرات.

كلما زادت مهارات طفلك في الرياضيات، تكون مشكلة الأربع ٤ أحجية ممتعة. في هذه المرحلة، تكون اختيارات طفلك محدودة جدًا، ولكنها لا تزال ممتعة للعب بها. سيكون من الصعب بشكل خاص تحقيق العديد من الأرقام دون القسمة أو استخدام الفواصل العشرية. لا تقلق بشأن الوصول إلى جميع الأرقام بالترتيب - فقط حاول الوصول إلى أكبر عدد ممكن من الأرقام المختلفة.

إليك بعض الأمثلة لتبدأ بها.

١ = (٤/٤) x (٤/٤) = ٤٤ / ٤٤

٢ = ٤ / ((٤ + ٤) / ٤)

٣ = (٤ + ٤ + ٤) / ٤

٤ = (٤ - ٤) x ٤ + ٤

٦ = ٤ + (٤ + ٤) / ٤

٧ = ٤٤ / ٤ - ٤

٨ = (٤ + ٤) x (٤/٤) = ٤ + ٤ + ٤ - ٤

٣٢ = ٤ x ٤ + ٤ x ٤

١) العب بالاستعانة بأرقام أخرى منفردة وخلق نتائج مختلفة.

٢) افترض أن آلة الحاسبة الخاصة بك يمكنها فقط إضافة ٤ أو ٧. ما الأرقام التي يمكنك إنتاجها؟

هذا هي النتيجة التي رأيناها عدة مرات حتى الآن. بدءًا من (٤ - ١) × (٧ - ١)، يمكنك تحقيق جميع الأرقام بإضافة مضاعفات ٤ و٧. ١٨ = ٢ × ٧ + ٤، ١٩ = ٣ × ٤ + ٧، ٢٠ = ٥ × ٤، ٢١ = ٣ × ٧، وهكذا.

٢) افترض أن لديها ٤ أو ٧، ولكنها يمكن أن تضيف وتطرح. ما الأرقام التي يمكنك إنتاجها؟

يمكنك إنتاج جميع الأرقام بهذه الطريقة.

٢) استبدل ٤ و٧ بأزواج أخرى من الأرقام. ماذا يحدث لهذه الأزواج؟

في نظرية الأعداد، يُسمى هذا بنظرية بيزوت. النتيجة تقول إنه بدمج مضاعفات رقمين، يمكنك إنتاج أي مضاعف لأكبر قاسم مشترك لهذين الرقمين.

٣) افترض أن لديك مفتاح ١ فقط ويمكنك فقط إضافة أو مضاعفة. على سبيل المثال، ٢ × (٢ × ١) + ١ تساوي ٥. ما الأرقام الأخرى التي يمكنك إنشاؤها؟

هذا سؤال عن الأرقام الثنائية في الغموض. ليس من المهم لطفلك أن يدرك هذا أو يفهمه، إنه فقط للعب. يمكن كتابة أي رقم في النظام الثنائي، لذلك يمكن تحقيق جميع الأرقام بدمج المضاعفة مع إضافة ١. على سبيل المثال، ٢١ هي ١٦ + ٤ + ١. لذلك، ٢١ = ٢ × (٢ × (٢ × (٢ × ١) + ٠) + ١) + ٠) + ١.

الفصل ٥ – المضاعفة أو لا شيء

— المقدمة —

يبدأ اللاعبون اللعبة باختيار ٥ أرقام مختلفة سرًا تكون أكبر من ٢٠ وأقل من ١٢٠. بعد اختيارهم، يتم كتابتهم في مكان يمكن للجميع رؤيته. باستخدام بطاقات الأرقام أو أي جهاز آخر، يتم إنشاء رقم عشوائي من ١ إلى ٢٠. يتم مضاعفة هذا الرقم بشكل متكرر حتى يصيب أحد أرقام اللاعبين لأول مرة أو يصبح الرقم أكبر من ١٢٠. اللاعب الأول الذي تصيب جميع أرقامه الخمسة هو الفائز.

— التحليل —

السؤال هو: ما هي أفضل خمسة أرقام يمكن اختيارها؟ إليك بعض الأفكار للتفكير فيها.

قاعدة: اختر دائمًا رقمًا يكون قوة العدد ٢ مضروبة في رقم من ١ إلى ٢٠.

إذا اخترت رقمًا مثل ٢٣ أو ٤٦، فلن يصيبوا أبدًا وستضمن خسارتك.

قاعدة: لا تختار أبدًا رقمًا هو ضعف رقم آخر كان بإمكانك اختياره ولكنك لم تفعل.

إذا اخترت ٤٤، لماذا لا تختار ٢٢ بدلاً من ذلك؟ إذا اختار الشخص الآخر ٢٢، فسوف تفوتك جولة.

مزيد من التحليل: الأرقام من ١ إلى ٢٠ لها نفس الفرصة ليتم اختيارها. ومع ذلك، لأن الرقم ٩ يؤدي إلى ١٨، فإن ١٨ له ضعف الفرصة كنقطة بداية مقارنة بالرقم ١١. إذا جمعت الطرق للحصول على بدايات مختلفة، فإن نقاط البداية تكون لها الاحتمالات التالية:

١١ - ٢٠/١ (من ١١)

١٢ - ٢٠/٣ (من ٣، ٦، و١٢)

١٣ - ٢٠/١ (من ١٣)

١٤ - ٢٠/٢ (من ٧ و١٤)

١٥ - ٢٠/١ (من ١٥)

١٦ - ٢٠/٥ (من ١، ٢، ٤، ٨، و١٦)

١٧ - ٢٠/١ (من ١٧)

١٨ - ٢٠/٢ (من ٩ و١٨)

١٩ - ٢٠/١ (من ١٩)

٢٠ - ٢٠/٣ (من ٥، ١٠، و٢٠)

من الواضح أن أفضل الأرقام للاستخدام هي مضاعفات الأرقام ١٦، ١٢، و٢٠. استراتيجية بسيطة هي استخدام الأرقام الخمسة: ٣٢، ٦٤، ٢٤، ٤٨، و٤٠. هذه الأرقام لن تفوز دائمًا، لكنها ستؤدي بشكل جيد جدًا بمرور الوقت.